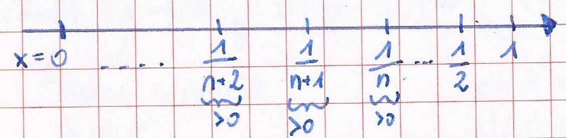
Folgemengen

(i)



$0 \leq x < \frac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N} \iff x = 0$

(ii)

$\forall x, y \in K,\ 0 < x < y:$

$\exists\, n \in \mathbb{N}: y < nx$

(Dienstag, 06.03.18)

1.6. Satz (von Eudoxos und Archimedes)

Sei $(K, +, \cdot)$ ein archimedischer Körper. Dann gilt

(i) $\forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon \in K): \exists\, n \in \mathbb{N} \ (n \in K): 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

(ii) $\forall x, y \in K,\ 0 < x < y: \exists\, n \in \mathbb{N}: y < nx$

Beweis:

(i) Aus $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > 0$ (denn sonst $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1 < 0$ Widerspruch)

Aus Def 1.5 $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{1}{n} \cdot 0}_{0} < \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{n}}_{\frac{1}{n}} < \underbrace{n \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{n}}_{\varepsilon} \qquad \text{(Def 1.3(4))}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

(ii) Def 1.5 $\Rightarrow \exists\, n' \in \mathbb{N}: y < n'$

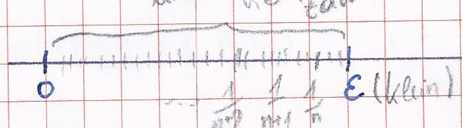
1. Fall: $(x \geq 1)$: $y < n' \cdot 1 \leq n' \cdot x \quad (n = n')$

2. Fall: $(x < 1)$: $0 < \frac{1}{n''} < x,\ n'' \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 < n'' \cdot x \Rightarrow y < n' \cdot 1 < n' \cdot n'' \cdot x$$

$$(n = n' \cdot n'')$$

Grenzwert



0 ist der Grenzwert der Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n})$

1.7. Satz: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein archimedischer Körper

$$\left(\frac{p}{q} < \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} :\Longleftrightarrow p\tilde{q} < q\tilde{p}\right) \quad \mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, ggT(p,q) = 1\right\}$$

Beweis: $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \exists\, n = \begin{cases} 1, & p \leq 0 \\ p+1, & p > 0 \end{cases} : \frac{p}{q} < n,$

denn $\left(\frac{p}{q} < p+1,\ p>0\right) \Longleftrightarrow \left(p < q \cdot (p+1),\ p > 0\right)$

Beispiel: $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ ist kein geordneter Körper und damit auch kein archimedischer Körper.

1.8. Definition

Sei $(K, +, \cdot)$ ein geordneter Körper. Die Funktion

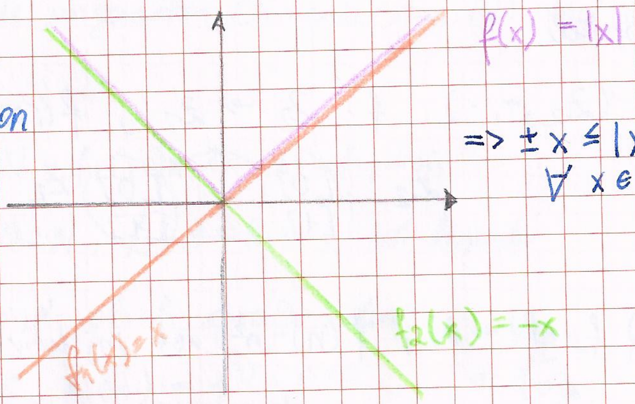
$|\cdot| : K \to K_+ = \{x \in K : x \geq 0\}$

$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad x \in K$

heißt Betragsfunktion.

Bemerkung

(i) Betragsfunktion



$\Rightarrow \pm x \leq |x|, \ \forall x \in K$

(ii) Betrag einer Zahl $x \in K$ ist der Abstand zw. 0 und X.

oder $|x|$ ist der Wert von $f(x) = |x|$ an der Stelle x.

$x = |x| = \sqrt{x^2}$; $-x = |x| = \sqrt{x^2}$

1.9. Satz: (Dreiecksungleichung) Sei $(K, +, \cdot)$ geordneter Körper. Dann gilt: $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in K$

Beweis:

1. Fall: $x+y \geq 0 \Rightarrow |x+y| = x+y \leq |x|+|y|$

$\uparrow \pm x \leq |x|$

$\pm y \leq |y|$

2. Fall: $x+y < 0 \Rightarrow |x+y| = -(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$

Wie groß ist $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$?

1.10. Definition

Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt

(i) injektiv, falls $\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

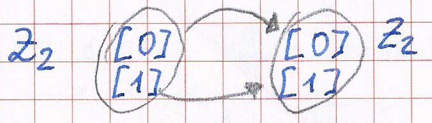
(ii) surjektiv, falls $\forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y$

(iii) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist. d.h.

$$\forall y \in Y: \exists!\, x \in X: f(x) = y$$

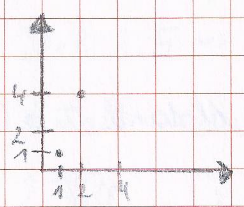
Beispiele:

(i) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ $f: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, $f([0]) = [0]$; $f([1]) = [1]$



ist bijektiv.

(ii) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv



denn,

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ (inj.)

- $\exists y \in \mathbb{N}$ (z.B. $y=2$): $\forall x \in \mathbb{N}: f(x) = x^2 \neq 2$
(Gegenbeispiel) (nicht surjektiv)

1.11. Definition (Bijektive Abbildungen und „gleich groß") (bei unendlichen Mengen)

(i) Zwei Mengen X und Y haben die selbe Kardinalität (Mächtigkeit) (d.h. X und Y sind „gleich groß"), falls

$$\exists\, f: X \to Y, \quad f \text{ ist bijektiv}$$

(ii) Eine Menge X heißt abzählbar, falls

$$\exists\, f: \mathbb{N} \to X, \quad f \text{ ist surjektiv}$$

(iii) Eine Menge X heißt abzählbar unendlich, falls

$$\exists\, f: \mathbb{N} \to X; \quad f \text{ ist bijektiv}$$

Beispiele:

(i) Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sind gleich groß, denn $f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(n) = n-1$; ist bijektiv.

$(\forall y \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists!\, x \in \mathbb{N} : f_1(x) = y)$

(ii) Die Mengen $\mathbb{N}$, $2 \cdot \mathbb{N}$ (nur gerade Elemente aus $\mathbb{N}$), $\mathbb{N} \setminus 2 \cdot \mathbb{N}$ (alle ungeraden Elemente aus $\mathbb{N}$) sind gleich groß, denn

$f_2: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f_2(n) = 2n$ ist bijektiv

$f_3: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus 2 \cdot \mathbb{N}$; $f_3(n) = 2n-1$ ist bijektiv

(iii) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleich groß, denn

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$$f_4: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}, \quad f_4(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 & \leftarrow \{0\} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} & \leftarrow \mathbb{N} \\ -\frac{(n+1)}{2} & n \text{ ungerade} & \leftarrow -\mathbb{N} \end{cases}$$

(iv) Naive „Rechnung" mit Mächtigkeiten

(i) $\to$ $|\mathbb{N}| = \infty$; $|\mathbb{N} \cup \{0\}| = \infty$

Aufpassen für später

$$\underbrace{\begin{aligned} \infty - \infty &= |(\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus \mathbb{N}| = 1 \\ \infty - \infty &= |\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}| = \infty \end{aligned}}$$

(vgl. mit $-x + x = 0$)

Grenzwerte sind Zahlen

Bedeutung: $-\infty$ ist das Inverse von $\infty \Rightarrow \infty = 0$

$\to$ Dieser Ausdruck ist sinnlos, d.h. ∞ ist keine Zahl.

Also ist ∞ kein Grenzwert

1.12. Proposition: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis

$$\mathbb{Q} = \{(p,q) : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ ggT(p,q) = 1\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

Definiere: $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — bijektiv mit

$(\overline{f_1}(p), q) \quad (\overline{f_2}(\overline{f_1}(p), q)$

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad \overline{f_1}(n) = f_1^{-1}(f_4^{-1}(n))$$

(aus Bsp. Def. 1.11.)